Федеральное агентство по образованию РФ
Муниципальное образовательное учреждение
лицей современных технологий управления №2

Физический и геометрический смысл дробных производных

Выполнил:
ученица 11 «В» класса
Герасимова
Анастасия Игоревна.
Научный руководитель:
преподаватель математики
МБОУ ЛСТУ №2
Гейдарова
Людмила Руслановна

Пенза 2019.

Оглавление

Введение.

Актуальность данной работы заключается в том, что многие физические процессы описываются при помощи дифференциальных уравнений, в том числе и дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. В настоящее время существует большое число книг и статей по теории и приложениям дифференциальных уравнений с дробными производными, но интерес к объектам, описываемыми дробными дифференциальными уравнениями, не ослабевает до сих пор и, в первую очередь, это связано с их многочисленными приложениями в различных областях физики и математики. При моделировании динамических процессов дробной (или фрактальной) природы зачастую необходимо решать не только прямую, но и обратную задачу, т.е. нахождение исходной функции, дробная производная которой используется в данной модели. Таким образом, необходимо очень точно представлять себе, что же такое дробная производная и какие именно процессы она характеризует.

Цель данной работы – развитие практических навыков учащихся в области дифференциального и интегрального исчислений, а также в теории дробной фрактальной размерности.

Задача данной работы - познакомить учащихся старшего звена, уже владеющих навыками дифференцирования и интегрирования простейших функций и обладающих элементарными знаниями о специальной теории относительности с понятиям дробных производных.

Методологическая основа работы – анализ научной литературы и практический метод.

При практической реализации вычислений дробных производных на ЭВМ использовался математический пакет MAPLE-17 автоматически вычисляющий интегралы и автоматически позволяющий работать с комплексными числами.

1. Что такое дробная производная.

Область математического анализа, называемая дробным исчислением и посвященная исследованию и применению производных и интегралов дробного (вещественного или комплексного) порядка, имеет давнюю историю и богатое содержание. Вопросы дробного исчисления имеют глубокую взаимосвязь с самыми разнообразными разделами математики: теорией функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др.

Мысль об обобщении понятия дифференцирования $\frac{d^p f(t)}{dt^p}$ на дробные значения p появилась практически одновременно с возникновением самого дифференциального исчисления. Первые шаги в этом направлении были сделаны Л. Эйлером, П. Лапласом и Ж. Фурье. Собственно историю дробного исчисления следует вести с работ Н. Х. Абеля и Ж. Лиувилля, появившихся в 30-е годы XIX в.

Рядом с работами Ж. Лиувилля по значимости следует поставить работы Б. Римана, который пришел к конструкции дробного интегрирования, служащей с тех пор одной из основных форм дробного интегрирования и названную его именем.

Дробные производные определяются различным образом. Наиболее часто встречается определение Римана – Лиувилля [4]

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_\alpha^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

и определение, основанное на обобщении целочисленной производной степенной функции x^n [5]

$$\frac{d^n(x^k)}{dx^n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}$$

применение которого подробно рассматривается в пункте 4 Практическая реализация.

Здесь $\Gamma(z)$ - это гамма-функция, математическая функция, введенная Леонардом Эйлером, а своим обозначением обязанная Лежандру.

При этом оригинальное определение Эйлера (1730 г.) имело следующий вид:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx,$$

из которого непосредственно вытекает одно из основных свойств гамма-функции:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Для данной функции также справедлива формула дополнения Эйлера

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

формула умножения Гаусса

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nz}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma(nz)$$

и частный ее случай, полученный Лежандром для $n=2$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2z).$$

Основные свойства и значения гамма-функции приведены в Приложении 1. В рамках данной работы наиболее ценными будут следующие значения гамма-функции, являющиеся объектом подробных изысканий Эйлера, Гаусса и Лежандра:

$$\Gamma(1)=0!=1$$
$$\Gamma(2)=1!=1$$
$$\Gamma(3)=2!=2$$
$$\Gamma(4)=3!=6$$
$$\Gamma(5)=4!=24$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)=\tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-n\right)=\frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$$

2. Геометрический смысл дробной производной.

В классической геометрии нет промежуточных объектов между точкой ($n=0$) и отрезком прямой ($n=1$), между отрезком прямой и квадратом ($n=2$) и так далее.

Целые показатели размерности бывают только у неподвижных пространств. Это предельный идеальный случай, который мы можем представить себе только теоретически, ведь реальное пространство – время без движения не существует.

Зачастую дробные показатели размерности считают противоестественными. Такой взгляд стал возможным лишь из-за того, что показатели размерности в большинстве физических процессов мало отличаются от целых чисел ввиду малых скоростей движения реальных физических объектов.

Дробные степени в показателях размерностей возникают также при описании фрактальных (разномасштабных, подобных целому) сред. В фрактальной среде, в отличие от сплошной среды, случайно блуждающая частица удаляется от места старта медленнее, так как не все направления движения становятся для нее доступными. Замедление диффузии в фрактальных средах настолько существенно, что физические величины начинают изменяться медленнее первой производной и учесть этот эффект можно только в интегрально – дифференциальном уравнении, содержащем производную по времени дробного порядка.

Будем исходить из того, что пространство и время – это диалектические противоположности. Диалектическое единство пространства и времени образует материю. Чем больше в материи пространства, тем меньше в ней времени, и наоборот. Одномерная материя образована одномерным пространством и одномерным временем; двумерная материя образована двумерным пространством и двумерным временем и т. д. Стоит отметить, что многомерность времени никак не проявляется, если рассматриваются процессы, происходящие в пространстве одного какого-либо измерения. Многомерность времени проявляется при сравнении процессов, происходящих в пространствах различной размерности.

Многомерность времени вытекает из закона сохранения материи, основанном на всем предшествующем опыте физики и утверждающем, что количество материи не изменяется при любых пространственно-временных преобразованиях. Никому еще не удалось дать определение понятиям «пространство» и «время», а вот дать определение понятию «материя» мы уже можем: материя – это физическая величина, равная произведению количества содержащегося в ней пространства на количество содержащегося в ней же времени:

$$M^n = S^n \cdot T^n = const \qquad (1)$$

Примем за геометрическую модель не искривленного одномерного пространства прямую линию. В этом случае примером одномерного искривленного пространства переменной кривизны может служить, например, гипербола. Важно, что такое пространство не может существовать вне бесконечного не искривленного пространства – плоскости.

Поверхность шара – это уже модель двумерного равномерно искривленного замкнутого пространства, и такое пространство может существовать только в абсолютном ньютоновом трехмерном не искривленном пространстве.

Выделим из трехмерного пространства *x, y, z* (рис.1) элементарное количество (квант) пространства $\Delta S^3 = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ (рис.1,а), которому соответствует элементарное количество времени $\Delta T^3 = \Delta t_{x} \cdot \Delta t_y \cdot \Delta t_z$. Тогда количество трехмерной материи в трехмерном кванте материи:

$$\Delta M^3 = \Delta S^3 \cdot \Delta T^3$$

Прибегнем к мысленному эксперименту. Начнем двигать ΔS^3 вдоль оси *x*. При некоторой $V < c$ (рис.1,в) размер Δx сократится, согласно специальной теории относительности (о ней более подробно в пункте 3 Физический смысл дробной производной) в $K_{СТО} = \left(1 - V^2 / c^2\right)^{1/2}$ число раз. Размер Δt_x, напротив, увеличится в такое же число раз: $\Delta t_x^{/} = \Delta t_x / K_{СТО}$. Количество трехмерной материи из-за сокращения коэффициентов $K_{СТО}$ в уравнении материи (1.1) не изменится и останется равным его количеству в неподвижном кванте материи:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t_x \Delta t_y \cdot \Delta t_z = \Delta x^{/} \cdot \Delta y \cdot \Delta_z \cdot \Delta t_x^{/} \cdot \Delta t_y \cdot \Delta t_z = \Delta M^3$$

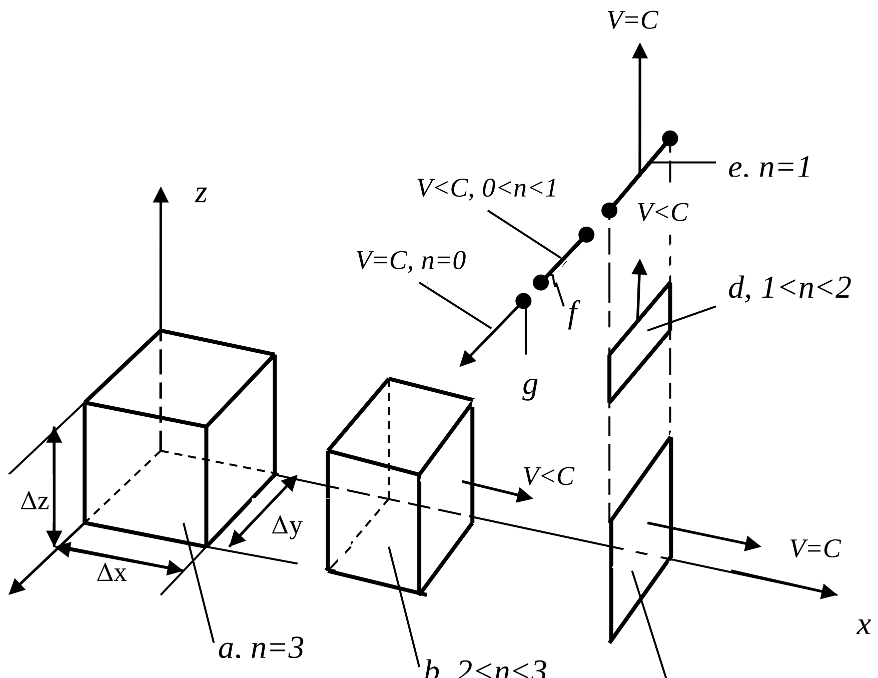


Рис.1 Геометрические модели многомерных пространств

При $V = c$ (рис.1,с) элементарное трехмерное пространство превратится в двумерное. С позиций нестандартного анализа, полученное нами двумерное пространство имеет бесконечно малую, но постоянную толщину. При достижении $V = c$ в кванте трехмерного пространства совершается фазовый пространственно-временной переход, сущность которого состоит в том, что в полученном двумерном пространстве как бы срабатывает «запорное устройство» и последующее уменьшение скорости движения не возвращает трехмерный квант в первоначальное состояние, двумерная пленка остается двумерной пленкой.

Ничтожная, с точки зрения неподвижного наблюдателя, толщина пленки двумерного пространства обеспечивает соблюдение закона сохранения материи и одинаковое протекание процессов в пространствах различного числа измерений.

Несмотря на то, что коэффициенты $K_{СТО}$ в уравнениях материи сокращаются, мы не имеем права продолжать мысленный эксперимент. Во-первых, мы исчерпали все возможности одномерного времени, а во-вторых, мы достигли предельной скорости.

Геометрическая сущность дробной производной состоит в том, что дробная производная показывает, во сколько раз количественно уменьшается движущаяся физическая величина по сравнению с неподвижной. Например, при $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = 1/2$ отрезок, движущийся со скоростью $V/c \approx 0{,}55$ уменьшается в размерах в 2 раза.

3. Физический смысл дробной производной.

Физический смысл дробной производной состоит в том, что дробная производная показывает, во сколько раз движущаяся физическая величина качественно отличается от неподвижной. Отрезок из рассмотренного примера уже не отрезок, но еще не точка. Отрезком он был при $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = 1$, а точкой он станет при $n = \Gamma_{(3/2)} / \Gamma_{(z)} = \infty$, то есть при $V/c = \infty$.

Специальная теория относительности (СТО) — теория, описывающая движение, законы механики и пространственно-временные отношения при произвольных скоростях движения, меньших скорости света в вакууме, в том числе близких к скорости света (в рамках специальной теории относительности классическая механика Ньютона является приближением низких скоростей). Основные положения СТО приведены в Приложении 2.

Фактически СТО описывает геометрию четырёхмерного пространства-времени.

В рамках СТО система отсчёта представляет собой некоторое материальное тело, выбираемое в качестве начала этой системы, способ определения положения объектов относительно начала системы отсчёта и способ измерения времени. Обычно различают системы отсчёта и системы координат. Добавление процедуры измерения времени к системе координат «превращает» её в систему отсчёта.

Событием называется любой физический процесс, который может быть локализован в пространстве, и имеющий при этом очень малую длительность. Другими словами, событие полностью характеризуется координатами *(x, y, z)* и моментом времени *t,* т.е. элементом материи. Примерами событий являются: вспышка света, положение материальной точки в данный момент времени и т. п.

Инерциальная система отсчёта (ИСО) — такая система, относительно которой объект, не подверженный внешним воздействиям, движется равномерно и прямолинейно. Постулируется, что ИСО существуют, и любая система отсчёта, движущаяся относительно данной инерциальной системы равномерно и прямолинейно, также является ИСО.

Помимо этого существуют еще 3 основных постулата СТО:

Постулат 1 (принцип относительности Эйнштейна). Законы природы одинаковы во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Это означает, что форма зависимости физических законов от пространственно-временных координат должна быть одинаковой во всех ИСО, то есть законы инвариантны относительно переходов между ИСО. Принцип относительности устанавливает равноправие всех ИСО.

Постулат 2 (принцип постоянства скорости света). Скорость света в вакууме одинакова во всех системах координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга[8].

Принцип постоянства скорости света противоречит классической механике, а конкретно — закону сложения скоростей. При выводе последнего используется только принцип относительности Галилея и неявное допущение одинаковости времени во всех ИСО. Таким образом, из справедливости второго постулата следует, что время должно быть относительным — неодинаковым в разных ИСО.

Постулат 3 (постулат причинности): любое событие может оказывать влияние только на события, происходящие позже него и не может оказывать влияние на события, произошедшие раньше него. Из постулата причинности и независимости скорости света от выбора системы отсчёта следует, что скорость любого сигнала не может превышать скорость света.

Преобразованиями Лоренца в физике, в частности, в СТО, называются преобразования, которым подвергаются пространственно-временные координаты (x, y, z, t) каждого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. Аналогично, преобразованиям Лоренца при таком переходе подвергаются координаты любого вектора 4-хмерного пространства.

Если ИСО K' движется относительно ИСО K с постоянной скоростью v вдоль оси x, а начала пространственных координат совпадают в начальный момент времени в обеих системах, то преобразования Лоренца (прямые) имеют вид:

$$x^{/} = \frac{x - V \cdot t}{\left(1 - W\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad ; \quad y = y^{/}; \quad z = z^{/}; \quad t^{/} = \frac{t - W \cdot x \cdot \frac{V}{c^2}}{\left(1 - W\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad (2)$$

где c — скорость света, величины со штрихами измерены в системе K', без штрихов — в системе K.

При $W = 1$ формулы (2) дают преобразования Лоренца и специальную теорию относительности. При $W = 0$ формулы (2) дают преобразования Галилея и механику Ньютона.

Из (1) следует, что

$$dx \cdot dt = 1,$$

что позволяет нам завершить полную геометриацию физики:

$$\frac{d^n f^m}{dt^n} = f^{n+m} \qquad (3)$$

$$\int_t f^m \cdot dt^n = f^{m-n} \qquad (4)$$

$$\frac{d^n f^m}{dx^n} = f^{m-n} \qquad (5)$$

$$\int_x f^m \cdot dx^n = f^{m+n} \qquad (6),$$

В формулах (3) - (6) f^n и f^m - физические величины, имеющие размерность n и m в абсолютной системе измерения физических величин.

Очевидно, что при преобразованиях Лоренца события, одновременные в одной системе отсчёта, не являются одновременными в другой (относительность одновременности). Кроме того, у движущегося тела сокращается продольный размер по сравнению с тем, какой оно имеет в сопутствующей ему системе отсчёта (лоренцево сокращение), а ход движущихся часов замедляется, если наблюдать их из «неподвижной» системы отсчёта (релятивистское замедление времени).

Однако (2) – это формулы линейной динамики. В теории же многомерных пространств обычно применяется нелинейная динамика, в которой релятивистский корень $K_{СТО} = \left(1 - W \cdot V^2 / c^2\right)^{1/2}$ заменяется коэффициентом теории многомерных пространств

$$K_{ТМП} = n = \frac{\Gamma_{(3/2)}}{\Gamma_{(z)}},$$

а линейная динамика (2) заменяется нелинейной динамикой с дробными производными:

$$\frac{d^n}{dt^n} x^k = \frac{\Gamma_{(k+1)}}{\Gamma_{(k-n+1)}} x^{k-n} \qquad (7)$$

описанной выше в пункте 1 Что такое дробная производная и подробно рассмотренной в пункте 4 Практическая реализация.

Рассмотрим гамма-функцию для вещественного аргумента при $z > 0$ (рис. 2). Сначала строим функцию $\Gamma_{(z)}$, а затем по формуле красного смещения z строим шкалу относительных скоростей

$$\frac{V}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Здесь мы просто придаем переменной z конкретный физический смысл: $z = \dfrac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$, называемый параметром красного смещения, и равный относительному увеличению длины волны принимаемого электромагнитного сигнала.

Теперь строим функцию $\dfrac{\Gamma_{(z)}}{\Gamma_{(3/2)}}$. В отличие от $\Gamma_{(z)}$, график функции $\dfrac{\Gamma_{(z)}}{\Gamma_{(3/2)}}$ несколько вытянут по оси ординат, а минимум его совмещен с прямой $\Gamma_{(z)}$=1.

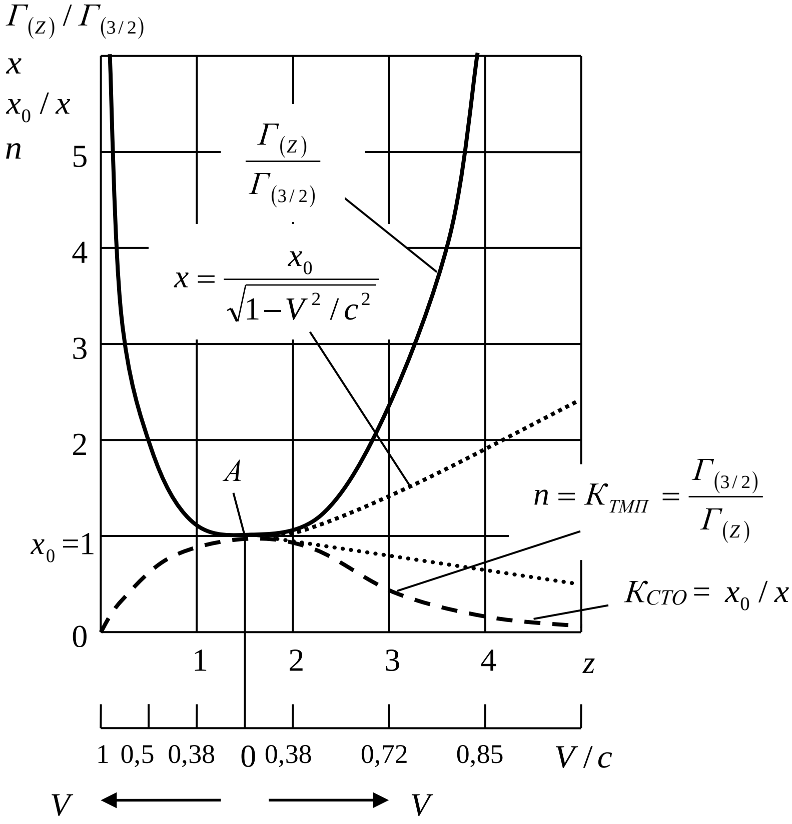


Рис. 2 Физический смысл дробной производной

Построим на том же графике кривую $x = \dfrac{x_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$.

Сразу же заметим, что эта релятивистская формула – это формула линейной динамики. Кроме того, что она весьма приближенно описывает процесс сокращения линейных размеров микрочастиц, она содержит в знаменателе скорость света, что вызвало необоснованное запрещение сверхсветовых скоростей. Гамма-функция выгодно отличается от релятивистского корня еще и тем, что она определена на всей числовой оси и даже на всей комплексной плоскости.

При $z < 2{,}2$ или, что то же самое, при $V / c < 0{,}53$ ошибки от применения релятивистского корня не превышают 11%, но при $V / c > 0{,}91$ релятивистская формула занижает фактическое сокращение размеров уже в 10 раз.

Заметим, что формула дробной производной (7) есть всего лишь одна из формул полностью геометризированной физики (3) - (6), а именно – это формула (5), если под n понимать не только целые, но и дробные числа.

4. Практическая реализация.

Рассмотрим ряд конкретных примеров.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^k$.

Тогда первая производная данной функции $f'(x) = \dfrac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$, продолжая находить следующие производные от которой получаем $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} x^k = \dfrac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$.

Заменяя факториалы гамма-функциями получаем, что $\dfrac{d^n}{dx^n} x^k = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}$.

Тогда половинная производная

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Повторяя данную операцию еще раз, получаем

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} 2\pi^{-1/2} x^{1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1/2-1/2+1)} x^{1/2-1/2} = 2\pi^{-1/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1$$

Данный результат является обоснованным, поскольку

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x \right) = \frac{d}{dx} x = 1$$

Пример 2. Пусть $f(x)=\sin(ax+b)$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax+b)=a^n\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}n\right)$, то, полагая $n=1/2$, получаем

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\sin(ax+b)=\sqrt{a}\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\sin(ax+b)\right)=\sqrt{a}\sqrt{a}\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=a\cos(ax+b)=f'(x)$.

В общем случае для получения значений дробных производных можно воспользоваться, формулой, приведенной в работе [2] и, например, математическим пакетом Maple–17, позволяющим работать с комплексными числами:

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}}f(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^{1+\varepsilon}\cdot e^{ikx}\cdot f_k dk$$

где f_k - Фурье-образ функции $f(x)$, для которых существует указанный интеграл, а ε - любое неотрицательное число. В Приложении 3 приводится справочный материал, касающийся работы со встроенными процедурами вычисления Фурье-образа в пакете Maple–17.

Пример 3. Пусть $f(x)=\sin ax$. Тогда, в результате использования пакета Maple–17, получаем

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}}\sin ax=\frac{a}{2}\left((ai)^{\varepsilon}\cdot e^{iax}+(-ai)^{\varepsilon}\cdot e^{-iax}\right)$$

Данная запись является достаточно непривычной, поскольку также содержит комплексные числа. Однако, используя формулы Коши, при $\varepsilon=0$ мы приходим к обычной производной от $\sin ax$, т.е. $f'(x)=a\cos ax$. Если положить $\varepsilon=1$, то приходим к выражению для второй производной от $\sin ax$, то есть $f'(x)=-a^2\sin ax$. Легко проверить, что при любых целых ε = 1, 2, 3, 4, ... будут получаться обычные производные соответствующего порядка.

Пример 4. Пусть $f(x)=\cos ax$. Тогда, в результате использования пакета Maple–17, получаем

$$\frac{d^{1+\varepsilon}}{dx^{1+\varepsilon}}\cos ax=\frac{ia}{2}\left((ai)^{\varepsilon}\cdot e^{iax}-(-ai)^{\varepsilon}\cdot e^{-iax}\right)$$

Отсюда также, как и в примере 3, будет следовать, что при всех целых ε = 1, 2, ... мы получим правильные выражения для соответствующих производных от $\cos ax$.

Вычисление дробных производных от более сложных функций, например, таких как $f(x)=e^{-x^2}$ приводится в работе [2] и в пакете Maple–17 осуществляется с помощью функции параболического цилиндра *CylinderD(a, x)*, изучение которой затруднительно в рамках школьного курса.

Заключение.

Развитие, исследование и применение производных и интегралов произвольного, а не только целочисленного порядка, обусловлено широким ее применением в задачах физики, химии, биологии, теории управления, механики, в том числе в теории упругости.

Важнейшим приложением теории фракталов к механике являются дифференциальные операторы дробного (фрактального) порядка в линейной теории вязкоупругости[1].

В физике, механике, биологии и других областях часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы. Примерами фракталов (или фрактальных сред) могут служить пористые среды и дробное броуновское движение. Фрактальные структуры являются следствием многих процессов и явлений, например, таких как диффузия, агрегирование, разрушение, динамический хаос, растворение и др[2]. Во многих работа рассматривается применение теории фракталов в моделировании биологических систем и фильтрации нефти и газа в пластах[3]. Отмечено, что пористые вещества ведут себя как системы с фрактальной структурой.

Дифференциальные уравнения с дробными производными используются при описании процессов, обладающих эффектом ”памяти“, причём дробное исчисление в теории таких систем приобретает основополагающее значение, сопоставимое с классическим анализом применительно к механике сплошных сред[4].

Список литературы:

1. Боброва И.А., Бугримов А.Л. Кузнецов В.С. О применении дробных производных в физических моделях. // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-Математика. – 2017, № 3.

---

[1] Сургуладзе Т. А. О некоторых применениях операторов дробного порядка в вязкоупругости. Диссертация на соискание ученой степени док- тора физико-математических наук. М., 2002. – 174 с.
[2] Головизнин В. М, Киселев В. П. , Короткин И. А., Юрков Ю. И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. Препринт № ИБРАЭ - 2001-14. Институт проблем безопасно- го развития атомной энергетики РАН, 2002. 26 с.
[3] Летников А. В., Черных В. А. Основы дробного исчисления. М: НЕФ- ТЕГАЗ, 2011. 429 с.
[4] Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011.№ 1(22). С. 255–268.

2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу о дробном дифференцировании. // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. Том 24, №3, 2018.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск.: РХД, 2002. 665 с.
4. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с. — 5-9 221-0 440-3 экз. Архивировано 20 июля 2013 года. Архивная копия от 20 июля 2013 см. на Wayback Machine.
7. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. – 1992 – Т. 20, № 3.

Приложение 1. Основные свойства и основные значения гамма-функции.

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\ n\in N \Leftrightarrow \Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1,\ \Gamma(3)=2,\ \Gamma(4)=6,\ \Gamma(5)=24,$$
$$\Gamma(6)=120,\ \Gamma(7)=720,\ \ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ n\in N \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi},\ n\in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4},\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8},\ \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{105\sqrt{\pi}}{16},$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)=\frac{945\sqrt{\pi}}{32},\ \Gamma\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{10395\sqrt{\pi}}{64},\ \Gamma\left(\frac{15}{2}\right)=\frac{135135\sqrt{\pi}}{128},\ \ldots$$

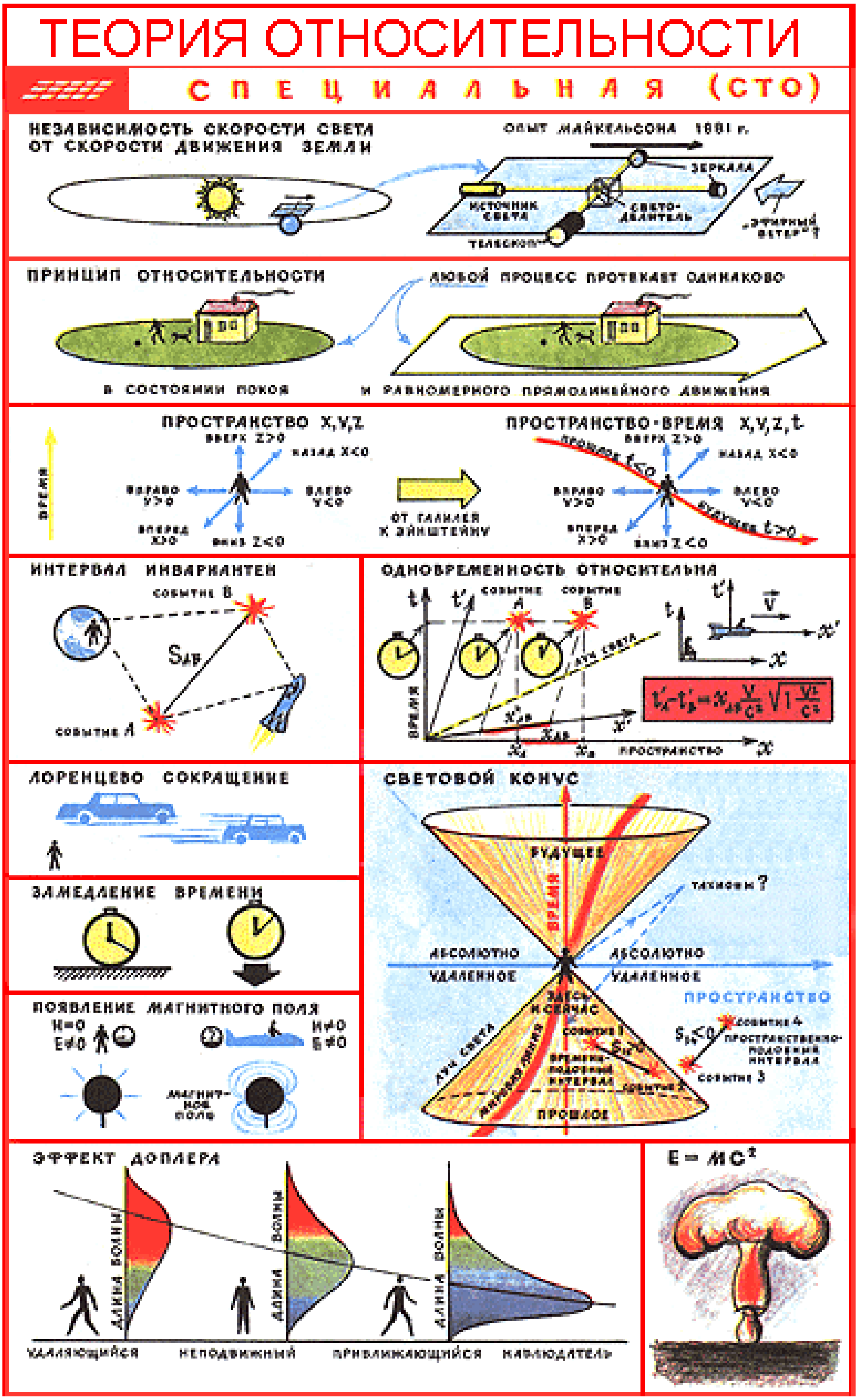
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi},\ n\in N \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi},\ n\in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4\sqrt{\pi}}{3},\ \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8\sqrt{\pi}}{15},\ \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{16\sqrt{\pi}}{105},$$

$$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{32\sqrt{\pi}}{945},\ \Gamma\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{64\sqrt{\pi}}{10395},\ \Gamma\left(-\frac{13}{2}\right)=-\frac{128\sqrt{\pi}}{135135},\ \ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n\pi,\ n\in N$$

Приложение 2. Основные положения специальной теории относительности.



Приложение 3. Справочный материал для работы с пакетом MAPLE-17.

Прямое преобразование Фурье преобразует функцию времени f(t) в функцию частот и заключается в вычислении следующей интегральной функции:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{(-jwt)}\, dt$$

Оно реализуется следующей функцией пакета интегральных преобразований `inttrans`:

```
fourier(expr,t,w)
```

Здесь `expr` — выражение (уравнение или множество), t — переменная, от которой зависит `expr`, и w — переменная, относительно которой записывается результирующая функция. Обратное преобразование Фурье задается вычислением интеграла:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{jwt}\, dw$$

Оно фактически переводит представление сигнала из частотной области во временную. Примеры применения преобразования Фурье представлены ниже:

```
> fourier(sin(t),t,w);
```

$$-I\,\pi\,\mathrm{Dirac}(w-1) + I\,\pi\,\mathrm{Dirac}(w+1)$$

```
> invfourier(%,w,t);
```

$$\frac{-1}{2} I\,(\mathbf{e}^{(I\,t)} - \mathbf{e}^{(-I\,t)})$$

```
> simplify(%);
```

$$\sin(t)$$

```
> fourier(1-exp(-a*t),t,w);
```

$$2\,\pi\,\mathrm{Dirac}(w) - \mathrm{fourier}(\mathbf{e}^{(-a\,t)}, t, w)$$

```
> invfourier(%,w,t);
```

$$1 - \mathbf{e}^{(-a\,t)}$$

Обратите внимание на то, что даже в простом первом примере применение обратного преобразования Фурье вслед за прямым не привело к буквальному восстановлению исходной функции `sin(t)`. Потребовалась команда `simplify`, чтобы перевести результат в виде представления синуса через экспоненциальные функции к обычному виду `sin(t)`.